

L'INTERPRETAZIONE MATEMATICA DELLA PITTURA DI PAOLO CHIMERI

Ing. Giulio Pravisani

INTRODUZIONE	2
COLORI	2
FIGURA E SFONDO	2
RETTANGOLI	3
QUADRATURA DEL CERCHIO	5
PERMUTAZIONI	6
COMBINAZIONI	7
POTENZA DEL BINOMIO	10
TRIANGOLO DI PASCAL.....	11
BINOMIO DI NEWTON	14
CONCLUSIONE	16

INTRODUZIONE

L'arte in quanto tale comunica emozioni. La comunicazione avviene stimolando i sensi consueti come la vista (per mezzo dei quadri) o l'udito (per mezzo della musica). Il linguaggio usato dall'arte però, a differenza di quanto avviene per la comunicazione scritta o verbale, non è composto da segni codificati in maniera assoluta e precisa, al contrario è costituito da elementi variabili e molteplici che generano una stimolazione in chi guarda (o ascolta) suscitando dunque l'emozione. Per questo motivo l'interpretazione di un'opera artistica non può che essere soggettiva, in quanto la relazione fra stimolo inviato ed emozione percepita dipende da tutta una serie di fattori sia psicologici che fisici specifici della persona che sta fruendo dell'opera d'arte.

Le emozioni inoltre sono legate strettamente alle esperienze proprie di ciascun individuo. In questo articolo cercheremo di descrivere, in base alla nostra esperienza in ambito ingegneristico (dunque matematico), alcune "emozioni matematiche" che ci sono balzate in mente guardando i quadri di Paolo Chimeri presenti sul suo sito internet¹.

COLORI

Chimeri utilizza 8 colori: rosso, arancione, giallo, verde, blu, violetto, bianco e nero (fig. 1). I primi 6 vengono considerati i colori principali visibili dall'uomo, a questi sono aggiunti il bianco ed il nero, che sono colori molto particolari. Il bianco fisicamente rappresenta la compresenza di tutti i 6 colori (cioè la loro somma): mescolando i 6 colori fondamentali si ottiene il colore bianco, come si può dimostrare con l'esperimento della scomposizione della luce attuata da un prisma (fig. 2). Il nero invece rappresenta la mancanza assoluta di colore, è il colore che si percepisce al buio, quando cioè non si vede più nulla, oppure, detto con altre parole, si vede il colore nero.

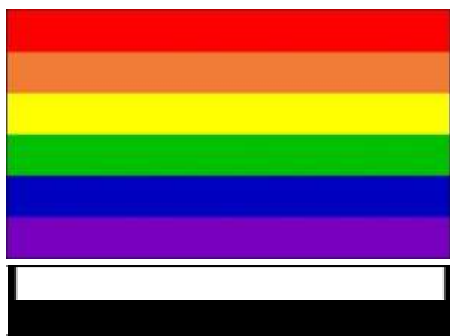


Figura 1: i 6 colori principali più bianco e nero.

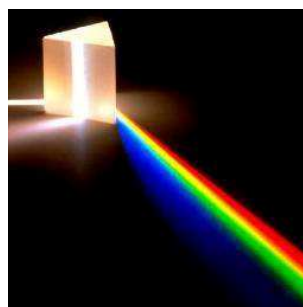


Figura 2: un prisma scompone la luce bianca nelle varie componenti colorate.

Nel 1704 Newton fu il primo a studiare la natura dei colori e ne identificò 7 (inserì l'indaco, anche se è difficilmente distinguibile dal viola). La motivazione di questo inserimento fu prettamente filosofica, in questo modo riuscì a fare un parallelo fra i 7 colori, le 7 note musicali, i 7 pianeti allora conosciuti ed i 7 giorni della settimana. Newton forse fu il primo ad effettuare un parallelo multidisciplinare fra ambiti così diversi. Ritroveremo questo grande studioso anche in seguito.

FIGURA E SFONDO

Negli anni '20 a Berlino si sviluppa la teoria della Gestalt (dal tedesco "von Augen gestellt", che letteralmente significa posizionato davanti agli occhi). Essa studia la capacità di percepire una figura dai contorni dettagliati che emerge rispetto ad uno sfondo non differenziato. A volte le rappresentazioni creano volutamente un'ambiguità fra figura e sfondo così come succede con il vaso ideato dallo psicologo danese Edgard Rubin nei primi del '900. In

¹ <http://www.paolochimeri.it/>

questo caso il cervello percepisce immediatamente il contorno del vaso che si staglia su uno sfondo scuro, ma dopo un po' di tempo succede una specie di inversione e lo sfondo scuro passa in primo piano rivelando due profili umani uno di fronte all'altro che si stagliano contro uno sfondo chiaro. Un bell'esempio di vaso di Rubin è rappresentato dal vaso (fig. 3) regalato alla regina Elisabetta in occasione della commemorazione del giubileo d'argento del 1977, nel quale a prima vista possiamo vedere un vaso su sfondo nero ma, con un po' di attenzione, emergono da uno sfondo bianco i profili della stessa regina (sulla destra) e del principe Filippo (sulla sinistra).

Nel quadro di Chimeri riportato in fig. 4 avviene una cosa simile. A prima vista si percepiscono tre rettangoli colorati su sfondo giallo, ma dopo un po' si può percepire la scritta "Si" in giallo su sfondo di tre colori.



Figura 3: Un esempio di vaso di Rubin.

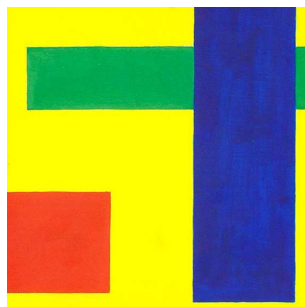


Figura 4: Un quadro di Paolo Chimeri.

RETTANGOLI

Chimeri (come il pittore olandese Piet Mondrian, fondatore del movimento del Neoplasticismo agli inizi del '900) dipinge una moltitudine di rettangoli diversi (fig. 5), quasi fosse in cerca di quello che possiede le caratteristiche migliori di bellezza ed eleganza. La matematica è in grado di fornire una risposta alla domanda "Qual è il rettangolo più bello?" oppure, detto con un gioco di parole, "Qual è il rettangolo che possiede la maggiore rettangolarità?".

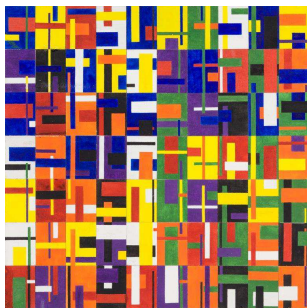


Figura 5: Un quadro di Paolo Chimeri.



Figura 6: Il Partenone (V secolo a.C.).

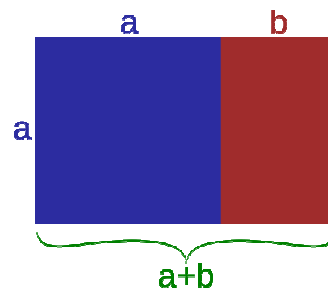


Figura 7: Il rettangolo aureo.

La risposta è nota fin dal tempo dei matematici greci. Essi scoprirono il cosiddetto rettangolo aureo, il cui lato maggiore è pari a circa 1,618... volte il lato minore. Pare che utilizzassero questo rapporto molto spesso (ad esempio per la costruzione del Partenone in fig. 6), motivo per cui il numero è indicato mediante la lettera greca ϕ , iniziale dello scultore greco Fidia.

Come si ottiene un rettangolo aureo? Si parte da un rettangolo di lati $a+b$ e a (fig. 7), si ritaglia una porzione quadrata (in blu a sinistra), ciò che resta è un altro rettangolo più piccolo (in rosso a destra). Se i lati $a+b$ e a del rettangolo grande sono in proporzione rispetto ai lati a e b del rettangolo piccolo, allora i due rettangoli sono aurei. Ciò si esprime con la formula seguente: $(a+b) : a = a : b$, che si risolve in $a = 1,618... b$.

Nella tab. 1 vediamo alcuni esempi di rettangoli comunemente usati: le tessere magnetiche (come carta di credito, bancomat e SIM), le vecchie musicassette e gli schermi 16:9 sono buone approssimazioni di rettangoli

aurei; invece il più comune rettangolo con il quale tutti noi abbiamo a che fare, cioè il foglio di carta formato A4, non lo è^{II}.

TIPOLOGIA	DIMENSIONI (cm) l x a	RAPPORTO l / a	SCOSTAMENTO DA ϕ
 Musicassetta	10 x 6,3	1,59	1,7 %
 Tessera magnetica	8,56 x 5,398	1,59	1,7 %
 SIM	2,5 x 1,5	1,67	3,2 %
 Schermo 16:9	Multiplo di 16 x 9	1,78	10 %
 Videocassetta	18,8 x 10,4	1,81	11,9 %
 Foglio A4	29,7 x 21	1,41	12,9 %
 Schermo 4:3	Multiplo di 4 x 3	1,33	17,8 %

Tabella 1: Confronto delle proporzioni di vari rettangoli di uso comune.

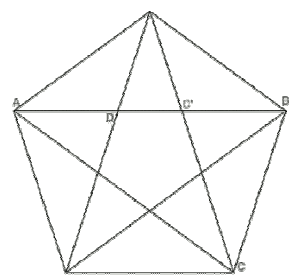


Figura 8: Pentagono con diagonali.

In geometria ϕ si trova in modo naturale in un pentagono nel quale sono state tracciate le diagonali (fig. 8):

$$\phi = AB : BC = AB : BD = AC' : AD = AD : DC'.$$

In matematica ϕ si trova nella sequenza numerica di Fibonacci, in cui ogni numero è uguale alla somma dei due che lo precedono: 1, 1, 2 (=1+1), 3 (=1+2), 5 (=2+3), 8 (=3+5), Dividendo qualsiasi numero di Fibonacci per il precedente si ottiene ϕ con una precisione tanto maggiore quanto in avanti nella sequenza è presa la coppia di numeri: 5/3=1,67...; 8/5=1,6; 13/8=1,625.

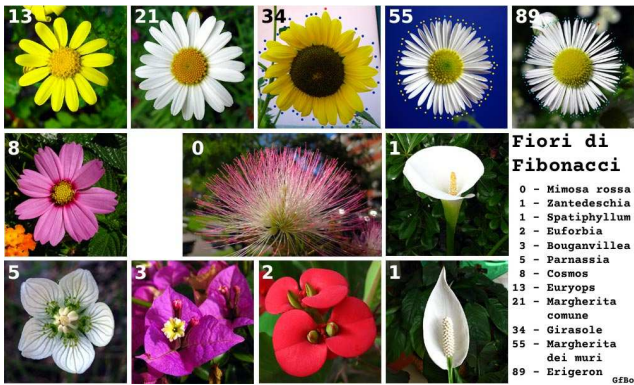


Figura 9: Numero di petali su un fiore.

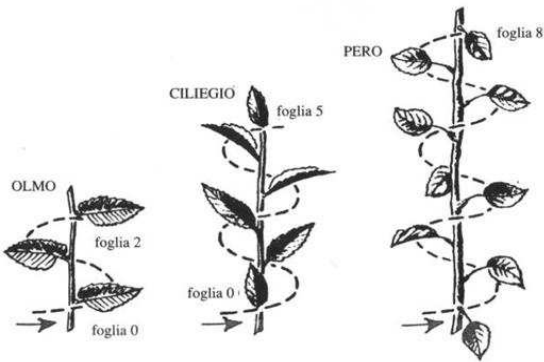


Figura 10: Disposizione delle foglie su un ramo.

Forse il rapporto aureo è considerato di grande bellezza perché lo si ritrova spesso in natura. Il numero di petali dei fiori tende ad essere un numero di Fibonacci, così come il numero delle foglie che nascono sui rami

^{II} Vedi standard ISO 216.

delle piante prima che una delle foglie successive sia disposta con lo stesso orientamento di una delle foglie precedenti (figg. 9 e 10).

La disposizione naturale in assoluto più bella si trova nei semi all'interno del fiore del girasole oppure nella forma della conchiglia del mollusco Nautilus, entrambe approssimano la spirale aurea (figg. 11, 12 e 13). Anche la costruzione della spirale aurea si basa sulla sequenza di Fibonacci. Si comincia da due quadrati di lato 1 messi in fila ai quali si affianca sulla destra un quadrato di lato 2 (1+1). Poi si dispone sopra un quadrato di lato 3 (2+1), sulla sinistra un quadrato di lato 5 (3+2) e così via come nella figura. La curva rossa disegnata all'interno dei quadrati è una spirale aurea.



Figura 11: I semi del girasole.



Figura 12: La conchiglia del Nautilus.

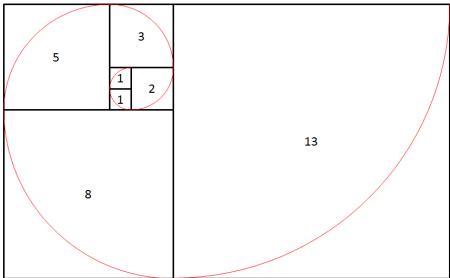


Figura 13: La spirale aurea.

La peculiarità di φ infine emerge anche in questa curiosità matematica: per ottenere il suo quadrato basta addizionargli 1 e per ottenere il suo inverso basta sottrargli 1, come indicato in tab. 2.

φ	$1/\varphi$	φ^2
1,618...	0,618...	2,618...

Tabella 2: Due proprietà curiose di φ .

QUADRATURA DEL CERCHIO

Alcune tele di Chimeri non dovrebbero chiamarsi "quadri" (cioè di forma quadrata), bensì "tondi" (cioè di forma rotonda), come quella riportata in fig. 14, dove troviamo dei quadrilateri inseriti all'interno di una tela di forma circolare. Ciò mette in chiara evidenza il contrasto presente fra queste due forme: cerchio e quadrato.

Essi sono forse le due forme più semplici del piano e nello stesso tempo anche le più belle. Entrambe si possono costruire, secondo i dettami della geometria greca, usando esclusivamente una riga (non graduata) ed un compasso. Per secoli i geometri ed i matematici hanno tentato di trovare le relazioni fra cerchio e quadrato: la cosiddetta "quadratura del cerchio". Questo problema consiste nel costruire con riga e compasso un quadrato con area pari a quella di un cerchio, cosa che a prima vista sembrerebbe fattibile. Indicando con l il lato del quadrato e con r il raggio del cerchio, l'equazione risolutiva risulta essere: $l^2=r^2\pi$ cioè $l = r\sqrt{\pi}$. Il lato del quadrato deve essere proporzionale al raggio del cerchio secondo la radice quadrata di π (fig. 15). Nel 1882 Von Lindemann dimostrò che π non è un numero costruibile con riga e compasso, dunque tantomeno lo è la sua radice quadrata. L'operazione di quadratura del cerchio allora, seppur calcolabile, risulta impossibile a causa del vincolo ad usare solo riga e compasso.

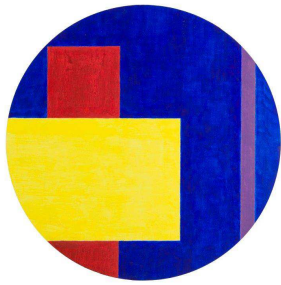


Figura 14: Un quadro di Paolo Chimeri.

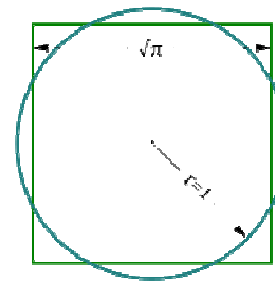


Figura 15: La quadratura del cerchio.

La quadratura del cerchio ha arrovellato per così tanto tempo gli studiosi che la sua espressione ancora oggi indica il trovare una soluzione perfetta anche se ipoteticamente impossibile ad un dato problema. Lo stesso Dante nei versi 133-136 del canto XXXIII del Paradiso utilizzò l'espressione per indicare l'impossibilità a trovare un modo per descrivere la visione di Dio che aveva innanzi:

*Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova.*

PERMUTAZIONI

L'interpretazione del quadro in fig. 16 risulta essere piuttosto agevolata, perché Chimeri nel titolo ci fornisce già una chiave di lettura: "4!".

Ora, il punto esclamativo dopo il numero quattro non sta ad indicare che bisogna pronunciare il numero con particolare enfasi, bensì rappresenta l'operazione matematica chiamata "fattoriale". Questo prevede la moltiplicazione di tutti i numeri dal numero in questione fino a 1, nel nostro caso quindi l'operazione da fare è $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Il fattoriale nella pratica rappresenta il numero di possibili ordinamenti di N oggetti distinti (detto anche numero di permutazioni). Ad esempio se per gli oggetti intendiamo le lettere di una parola, i loro ordinamenti coincideranno con gli anagrammi della parola stessa. Possiamo provare a scrivere tutti gli anagrammi della parola *COSA*, che sono 24, evidenziando le lettere usando gli stessi 4 colori che usa Chimeri, come riportato in tab. 3.

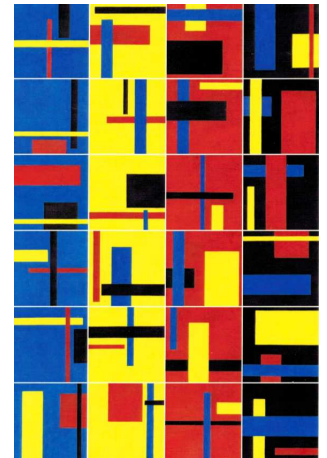


Figura 16: 4!.

SCELTA 1 (fra 4 lettere)	SCELTA 2 (fra 3 lettere)	SCELTA 3 (fra 2 lettere)	SCELTA 4 (fra 1 lettera)	RISULTATO	NUMERO
C	O	S	A	COSA	1
		A	S	COAS	2
	S	O	A	CSOA	3
		A	O	CSAO	4
	A	O	S	CAOS	5
		S	O	CASO	6
O	C	A	S	OCAS	7
		S	A	OCSA	8
	S	A	C	OSAC	9
		C	A	OSCA	10
	A	S	C	OASC	11
		C	S	OACS	12
S	C	O	A	SCOA	13
		A	O	SCAO	14
	O	C	A	SOCA	15
		A	C	SOAC	16
	A	C	O	SACO	17
		O	C	SAOC	18
A	C	S	O	ACSO	19
		O	S	ACOS	20
	O	S	C	AOSC	21
		C	S	AOCS	22
	S	O	C	ASOC	23
		C	O	ASCO	24

Tabella 3: Gli anagrammi della parola COSA.

È un caso che il numero degli anagrammi della parola COSA (che ha 4 lettere) corrisponda al valore di $4! = 24$? Ovviamente no. La composizione dell'anagramma prevede infatti l'effettuazione di 4 scelte consecutive, una per ogni lettera usabile: la scelta della prima lettera avviene quando ho ancora tutte le lettere disponibili, quindi ho 4 possibilità; la scelta della seconda lettera avviene da un paniere di 3 lettere (perché una lettera è stata usata nella scelta precedente); per lo stesso motivo la scelta della terza lettera è limitata a solo 2 lettere e durante la quarta scelta non rimane che soltanto una lettera, cioè l'ultima. Visto che le possibilità presenti in ciascuno dei 4 stadi di scelta si combinano con tutte le altre, il numero di possibilità totali risulta essere il loro prodotto: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, che si può scrivere in modo più compatto come $4!$.

Il quadro "4!" è composto da 24 tele nelle quali sono presenti 4 elementi distinti: 3 rettangoli più lo sfondo. Usando 4 colori (blu, giallo, rosso e nero), in quanti modi si possono colorare i 4 elementi? La risposta è semplice: ho una scelta di 4 colori per lo sfondo, dopodiché mi restano 3 colori possibili per il primo rettangolo, 2 colori per il secondo rettangolo ed un ultimo colore per il terzo rettangolo: in totale le possibilità sono ancora $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Il quadro riporta proprio tutte e 24 queste possibilità, ecco dunque spiegato il suo titolo.

COMBINAZIONI

Il quadro di Chimeri in fig. 17 risulta essere formato da 70 piccole tele disposte in una matrice di 10 righe per 7 colonne. Ogni tela rappresenta 3 rettangoli colorati su uno sfondo altrettanto colorato. Quale struttura matematica

è nascosta dietro questa rappresentazione? Per capirlo dobbiamo introdurre il concetto di combinazione matematica.

Ipotizziamo per semplicità di avere un mazzo di carte numerate da 1 a 8 (8 carte totali) e ci domandiamo: quante mani di 4 carte possiamo formare? Schematicamente il compito consiste nel valutare quante possibilità ho di prendere 4 carte da un mazzo di 8. La situazione ora è diversa rispetto agli anagrammi precedenti per due motivi: adesso non si considera più l'insieme totale delle 8 carte a disposizione ma solo una sua parte formata da 4 carte, inoltre l'ordine delle 4 carte pescate non è importante, quindi per esempio la mano formata da 1-2-3-4 è considerata equivalente alle mani 1-2-4-3, 1-3-2-4, 1-3-4-2, 1-4-2-3, 1-4-3-2, 2-1-3-4, 2-1-4-3, 2-3-1-4, 2-3-4-1, 2-4-1-3, 2-4-3-1, 3-1-2-4, 3-1-4-2, 3-2-1-4, 3-2-4-1, 3-4-1-2, 3-4-2-1, 4-1-2-3, 4-1-3-2, 4-2-1-3, 4-2-3-1, 4-3-1-2 e 4-3-2-1 (queste 24 mani vanno contate come una unica). Per analizzare questo problema possiamo riferirci all'idea di permutazione già esposta.

Dato che la mano in questione è composta da 4 carte, dovremo attuare 4 scelte consecutive. La prima scelta è fatta su tutte e 8 le carte (quindi si hanno 8 possibilità), la seconda scelta è fatta su 7 carte, la terza scelta è fatta su 6 carte, la quarta scelta è fatta su 5 carte, dopodiché ci si ferma perché la mano è completa. Sappiamo già che le mani totali sono il prodotto delle possibilità presenti nelle 4 scelte, cioè $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$. La moltiplicazione assomiglia a quella fatta nel calcolo del fattoriale, l'unica differenza è che qui ci si ferma prima. Dobbiamo ricordarci però che per ognuna di queste possibilità si stanno contando anche tutti i suoi rimescolamenti (cioè, per così dire, i suoi anagrammi). Quanti sono i possibili rimescolamenti di 4 carte? Lo sappiamo già, essi sono $4! = 24$. Ecco che allora che il numero di mani effettive si trova dividendo $1680 : 24 = 70$. Giocando un po' con la formula del fattoriale si perviene ad una nuova formula $8! : (8-4)! : 4! = 70 = C_{8,4}^{III}$ che rappresenta il numero di combinazioni (C) che si ottengono prendendo 4 carte alla volta da un insieme di 8 carte (tab. 4). Se sostituiamo agli 8 numeri gli 8 colori usati da Chimeri, ritroviamo lo stesso schema del suo quadro, che rappresenta, mediante 70 tele piccoline, tutte le combinazioni possibili di colorare 3 rettangoli più lo sfondo usando 8 colori, e questo non è altro che $C_{8,4} = 70$.

I più bravi possono rispondere alla seguente domanda ispirata alla canzone di Gino Paoli: quanti cin cin si possono fare in un gruppo di 4 amici al bar^{IV}?

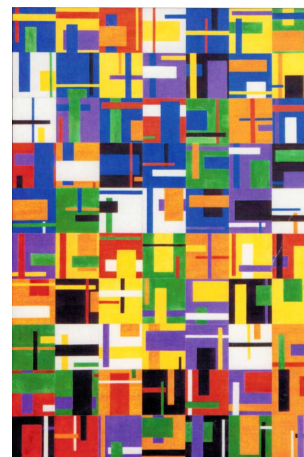


Figura 17: Un quadro di Paolo Chimeri.

^{III} La formula per calcolare le combinazioni di N oggetti presi a gruppi di K è $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

^{IV} La soluzione è $C_{4,2} = 4! : 2! : 2! = 6$.

SCELTA 1 (fra 8 carte)	SCELTA 2 (fra 7 carte)	SCELTA 3 (fra 6 carte)	SCELTA 4 (fra 5 carte)	RISULTATO	NUMERO
1	2	3	4	1 2 3 4	1
			5	1 2 3 5	2
			6	1 2 3 6	3
			7	1 2 3 7	4
			8	1 2 3 8	5
		4	5	1 2 4 5	6
			6	1 2 4 6	7
			7	1 2 4 7	8
			8	1 2 4 8	9
		5	6	1 2 5 6	10
			7	1 2 5 7	11
			8	1 2 5 8	12
		6	7	1 2 6 7	13
			8	1 2 6 8	14
			7	1 2 7 8	15
	3	4	5	1 3 4 5	16
			6	1 3 4 6	17
			7	1 3 4 7	18
			8	1 3 4 8	19
		5	6	1 3 5 6	20
			7	1 3 5 7	21
			8	1 3 5 8	22
			7	1 3 6 7	23
		6	8	1 3 6 8	24
			8	1 3 7 8	25
			6	1 4 5 6	26
	4	5	7	1 4 5 7	27
			8	1 4 5 8	28
			7	1 4 6 7	29
			8	1 4 6 8	30
		6	8	1 4 7 8	31
			7	1 5 6 7	32
			8	1 5 6 8	33
			7	1 5 7 8	34
	6	7	8	1 6 7 8	35
2	3	4	5	2 3 4 5	36
			6	2 3 4 6	37
			7	2 3 4 7	38
			8	2 3 4 8	39
		5	6	2 3 5 6	40
			7	2 3 5 7	41
			8	2 3 5 8	42
		6	7	2 3 6 7	43
			8	2 3 6 8	44
			8	2 3 7 8	45
			6	2 4 5 6	46
	4	5	7	2 4 5 7	47
			8	2 4 5 8	48
			7	2 4 6 7	49
			8	2 4 6 8	50
		6	8	2 4 7 8	51
			7	2 5 6 7	52
			8	2 5 6 8	53
			7	2 5 7 8	54
3	4	5	8	2 6 7 8	55
			6	3 4 5 6	56
			7	3 4 5 7	57
			8	3 4 5 8	58
		6	7	3 4 6 7	59
			8	3 4 6 8	60
			8	3 4 7 8	61
			7	3 5 6 7	62
	5	6	8	3 5 6 8	63
			8	3 5 7 8	64
			8	3 6 7 8	65
			7	4 5 6 7	66
4	5	6	8	4 5 6 8	67
			8	4 5 7 8	68
		7	8	4 6 7 8	69
			8	5 6 7 8	70

Tabella 4: Combinazioni di 8 oggetti presi a gruppi di 4.

POTENZA DEL BINOMIO

Ora introdurremo un concetto prettamente matematico, che però in seguito avrà un'applicazione inaspettata. Calcoliamo le potenze della somma di due numeri a e b , scritto in formula $(a+b)^N$. Dato che i numeri sono due, questa somma si chiama anche binomio.

il valore di $(a+b)^0$ è banale perché ogni numero elevato a zero risulta uguale a 1. Anche $(a+b)^1$ non presenta difficoltà perché ogni numero elevato a uno rimane uguale a se stesso. Per le potenze successive usiamo il seguente schema geometrico (fig. 18): la somma $a+b$ equivale ad un segmento di lunghezza a giustapposto ad un altro segmento di lunghezza b ; il prodotto ab invece equivale all'area di un rettangolo di lati a e b . Premettiamo che non siamo interessati alle lunghezze reali dei segmenti perché ci scriveremo vicino quanto vale la loro lunghezza, nello stesso modo scriveremo all'interno del rettangolo quanto vale la sua area. Ciò risulta molto più intuitivo della usuale moltiplicazione aritmetica perché permette di apprezzare visivamente che cosa succede.

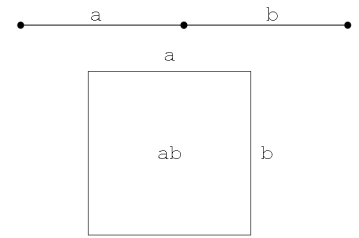


Figura 18: Rappresentazione geometrica di somma e prodotto.

Usando questo metodo geometrico moltiplichiamo la somma $a+b$ per se stessa, cioè troviamo $(a+b)^2$. Disegniamo un rettangolo con il lato orizzontale ed il lato verticale composti da due segmenti $1a$ e $1b$ (la moltiplicazione per 1 non cambia nulla). La moltiplicazione dei due lati mi genera un rettangolo diviso in quattro aree di valore rispettivamente $1aa$, $1ab$, $1ab$ e $1bb$.

1a	1b	
1aa	1ab	1a
1ab	1bb	1b

Scriviamo in colonna le aree rappresentate dai termini uguali in modo tale da poter calcolare la somma dell'area totale: essa vale $1aa+2ab+1bb$.

$$\begin{array}{r}
 1aa \quad 1ab \quad \quad + \\
 \quad \quad 1ab \quad 1bb \quad = \\
 \hline
 1aa \quad 2ab \quad 1bb
 \end{array}$$

Moltiplichiamo di nuovo il risultato appena ottenuto per $a+b$, cioè troviamo $(a+b)^3$.

1aa	2ab	1bb	
1aaa	2aab	1abb	1a
1aab	2abb	1bbb	1b

Scriviamo di nuovo in colonna le aree rappresentate dai termini uguali in modo tale da poter calcolare la somma dell'area totale: essa vale $1aaa+3aab+3abb+1bbb$.

$$\begin{array}{r}
 1aaa \quad 2aab \quad 1abb \quad \quad + \\
 \quad \quad 1aab \quad 2abb \quad 1bbb \quad = \\
 \hline
 1aaa \quad 3aab \quad 3abb \quad 1bbb
 \end{array}$$

Possiamo continuare nello stesso modo per trovare il valore di $(a+b)^4$: il risultato è $1aaaa+4aaab+6aabb+4abbb+1bbbb$.

Riassumiamo tutti i risultati trovati nello schema triangolare di tab. 5.

$(a+b)^0=$	1													
$(a+b)^1=$	1 a		+	1 b										
$(a+b)^2=$	1 aa		+	2 ab		+	1 bb							
$(a+b)^3=$	1 aaa		+	3 aab		+	3 abb		+	1 bbb				
$(a+b)^4=$	1 aaaa		+	4 aaab		+	6 aabb		+	4 abbb		+	1 abbbb	

Tabella 5: Varie potenze del binomio.

Facciamo alcune osservazioni:

- la potenza di grado N è sempre composta da una somma di $N+1$ termini;
- ciascuno di questi termini è composto sempre da N lettere;
- il primo termine è composto solo da lettere a che via via sono sostituite da lettere b fino ad arrivare all'ultimo termine composto solo da lettere b ;
- i coefficienti (in grassetto) della riga N si ricavano dalla somma dei due coefficienti immediatamente superiori nella riga $N-1$, per esempio l'ultima riga si ricava in questo modo:

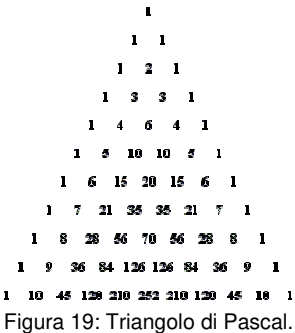
0	1	3	3	1	0
 + 	 + 	 + 	 + 	 + 	
1	4	6	4	1	

TRIANGOLO DI PASCAL

Tralasciamo per ora tutte le lettere a e b della tabella precedente e concentriamoci solo sui coefficienti in grassetto, cioè sui numeri presenti. Partendo dal numero 1 e sommando sempre i coefficienti a due a due per ottenere la riga successiva otteniamo un triangolo di numeri molto particolare, di cui in fig. 19 riportiamo le prime 11 righe.

Questo triangolo è talmente famoso che molti studiosi di nazionalità diverse lo hanno analizzato, come Zhu Shijie in Cina nel 1303, Michael Stifel in Germania nel 1544, Niccolò Fontana detto il Tartaglia in Italia nel 1556 e Blaise Pascal in Francia nel 1654. Ovviamente Pascal, essendo il più recente, ha pubblicato il trattato più completo, così oggi questo triangolo è universalmente conosciuto come triangolo di Pascal. Esso possiede numerose proprietà anche inaspettate, ne elenchiamo solo alcune.

1. È simmetrico rispetto all'asse verticale (fig. 20).
2. Nella prima diagonale ci sono solo 1, nella seconda diagonale ci sono i numeri interi, nella terza diagonale ci sono i numeri che si possono rappresentare con dei punti disposti a triangolo e nella quarta diagonale ci sono i numeri che si possono rappresentare con dei punti disposti a tetraedro (figg. 21 e 22).



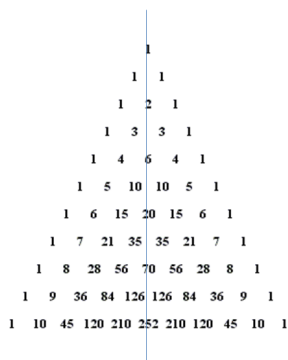


Figura 20: Proprietà 1.

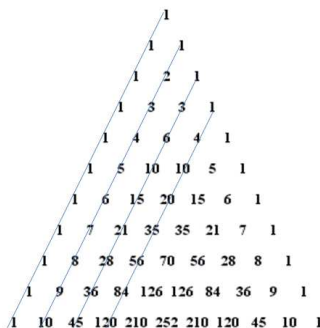


Figura 21: Proprietà 2.

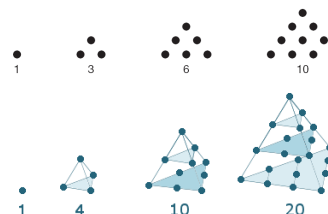


Figura 22: Numeri triangolari e tetraedrici.

- La somma dei numeri nelle diagonali segnate in fig. 23 rappresenta la serie di Fibonacci $1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 1+3+1=5, 1+4+3=8, \dots$
- Partendo da un 1 e disegnando un percorso simile ad una mazza da hockey come in fig. 24, si ottiene che l'ultimo numero è uguale alla somma dei precedenti (es. $1+5+15+35=56$).
- Il quadrato di un numero situato sulla diagonale dei numeri interi è uguale alla somma dei due numeri individuati disegnando il triangolo come in figura 25 (es. $6^2=21+15$).

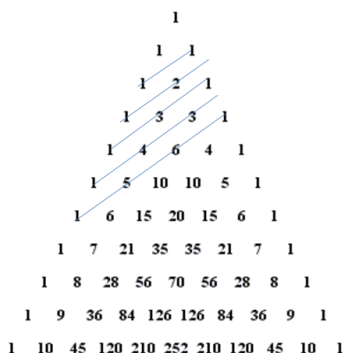


Figura 23: Proprietà 3.

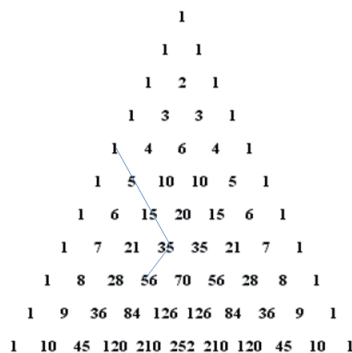


Figura 24: Proprietà 4.

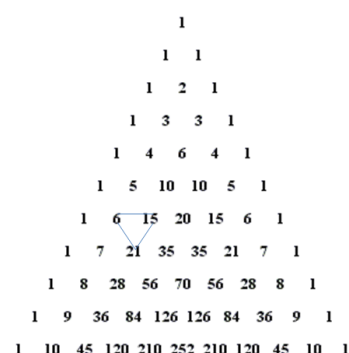


Figura 25: Proprietà 5.

- Il cubo di un numero situato sulla diagonale dei numeri interi è uguale alla somma dei prodotti dei numeri individuati disegnando due triangoli come in fig. 26 più il numero stesso (es. $5^3=1 \times 6 \times 10 + 1 \times 4 \times 15 + 5 = 125$).
- I prodotti dei tre numeri intercettati da due triangoli disposti come in fig. 27 sono uguali (es. $20 \times 21 \times 70 = 15 \times 35 \times 56 = 29.400$).
- La somma dei numeri compresi in un parallelogramma con 2 lati sulle diagonali dei numeri 1 è uguale al numero che sta subito sotto il vertice inferiore del parallelogramma stesso meno 1, come mostrato in fig. 28 (es. $1+1+1+1+1+1+1+2+3+4+5+6+1+3+6+10+15+21=84-1=83$).

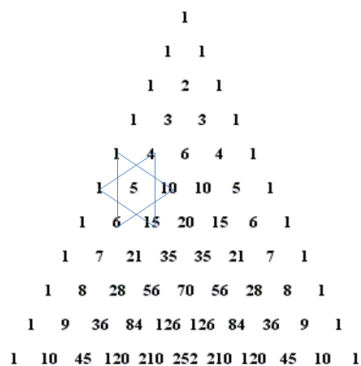


Figura 26: Proprietà 6.

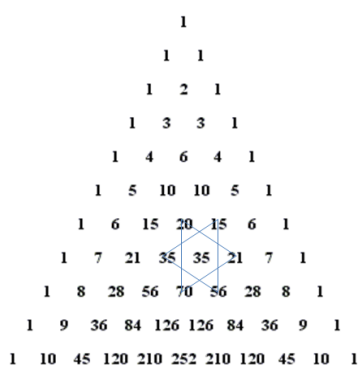


Figura 27: Proprietà 7.

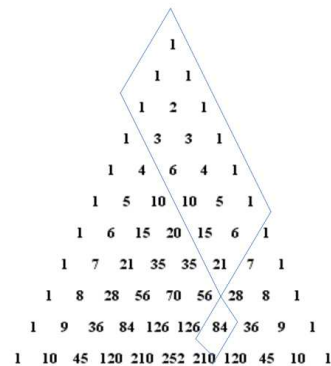


Figura 28: Proprietà 8.

9. La somma dei numeri presenti su ciascuna riga è una potenza di 2 (es. $1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$) e alternando somma e differenza ai numeri presenti su ciascuna riga il risultato è sempre zero (es. $1-6+15-20+15-6+1=0$, fig. 29).
10. Poniamo una torre nell'angolo in alto a sinistra di una scacchiera. Il numero di percorsi che essa può fare per raggiungere le altre caselle, spostandosi ovviamente solo a destra ($\rightarrow$) ed in basso ($\downarrow$), coincide coi numeri del triangolo di Pascal. D'altronde su ogni casella si può arrivare soltanto passando dalla casella immediatamente superiore o dalla casella che sta alla sua sinistra, quindi il totale dei percorsi si ottiene sommando i percorsi di queste due caselle esattamente come si sommano i numeri del triangolo di Pascal. Ad esempio, per raggiungere la casella rossa della figura 30, la torre può effettuare le seguenti 4 mosse: $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow$, $\rightarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow$, $\rightarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow$, $\downarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$.

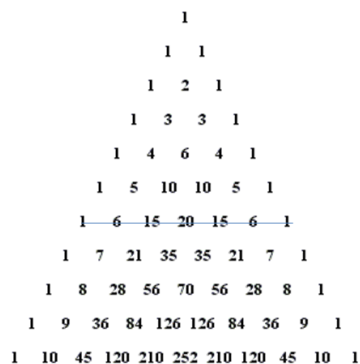


Figura 29: Proprietà 9.

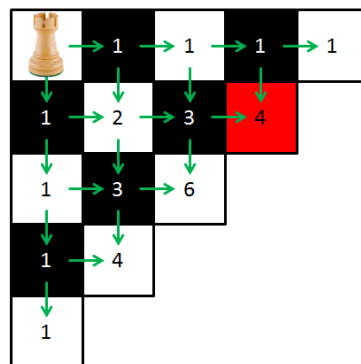


Figura 30: Percorsi della torre.

11. Sir Francis Galton nel 1889 mise a punto una macchina per dimostrare alcune proprietà statistiche in cui una serie di palline dovevano seguire un percorso a bivi fino a cadere in dei recipienti sottostanti (fig. 31). Ipotizzando per ogni bivio una probabilità uguale al 50% per la caduta a destra o a sinistra, risulta che il numero di palline che ci si aspetta di trovare dopo ogni bivio coincide coi numeri del triangolo di Pascal (fig. 32). Per esempio lasciando cadere 32 palline troveremo in media 1 pallina nel primo e nel sesto recipiente, 5 nel secondo e nel quinto, 10 nel terzo e nel quarto. La distribuzione di palline nei recipienti, simile ad una campana rovesciata, approssima la celebre curva di distribuzione Gaussiana.



Figura 31: Macchina di Galton.

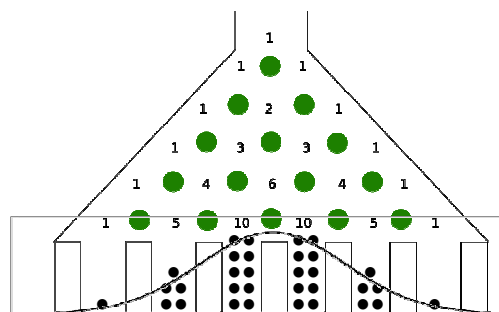


Figura 32: Frequenze di caduta delle palline e curva gaussiana.

12. Cancellando i soli numeri pari (in nero) da un triangolo di Pascal (fig. 33) resta una struttura particolare chiamata triangolo di Sierpinski (fig. 34). Questa figura si può costruire anche con una procedura infinita che consiste, partendo da un triangolo pieno, nel rimuovere ogni volta il triangolo centrale, come mostrato in fig. 35. La figura ottenuta è un frattale che ha dimensione compresa fra 1 e 2, cioè è più di una linea (dimensione 1) ma non riesce a riempire un piano (dimensione 2).

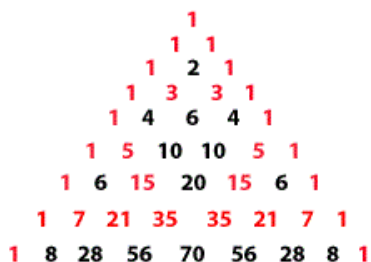


Figura 33: Proprietà 12.

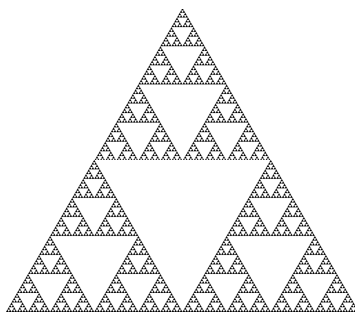


Figura 34: Triangolo di Sierpinski.



Figura 35: Costruzione del triangolo di Sierpinski.

BINOMIO DI NEWTON

Newton studiò la potenza del binomio^V nel 1665 ma utilizzò un metodo diverso dal triangolo di Pascal per calcolare i vari coefficienti dei termini di ogni riga. Egli si basò sul concetto di combinazione di oggetti che abbiamo già espresso in precedenza.

Consideriamo ad esempio $(a+b)^4$ ed esplicitiamone tutti e 4 i fattori. Ispirandoci al lavoro di Chimeri, sfruttiamo la nostra vena artistica per colorare le lettere contenute in ciascuna parentesi: $(a+b) \times (a+b) \times (a+b) \times (a+b)$. Eseguire il prodotto equivale a prendere in tutti i modi una lettera rossa dalla prima parentesi, una gialla dalla seconda, una verde dalla terza ed una blu dalla quarta. In quanti modi è possibile fare ciò?

Ipotizziamo di prendere 4 lettere a , è evidente che la scelta è obbligata: bisogna prendere una a dalla prima parentesi rossa, una dalla seconda gialla, una dalla terza verde ed una dalla quarta blu. In definitiva si avranno 4 a di colori diversi ($aaaa$) e, tralasciando i rimescolamenti, c'è un solo modo per poterlo fare. Ma, pensandoci bene, questo non è altro che il numero di modi in cui posso colorare le quattro a usando 4 colori diversi, cioè le combinazioni $C_{4,4}=1$. Ho solo una combinazione possibile, questo vuol dire che nel prodotto otterrò solo un termine composto da 4 a .

Il numero di termini composti da 3 a (e una b) corrisponderanno invece al numero di modi in cui si possono prendere 3 a (e una b) dalle parentesi colorate (cioè i modi in cui si possono colorare 3 a oppure una b usando 4

^V La formula del binomio di Newton, detto anche teorema binomiale, è:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

colori). Considerando solo le a la risposta è 4 modi: aaa , aaa , aaa , aaa , cioè le combinazioni $C_{4,3}=4$. A questo punto bisogna aggiungere ancora una lettera b per termine, che si può scegliere banalmente dalla parentesi col colore mancante, per ottenere aaab , aaba , abaa , baaa . Questo, per inciso, significa che se ci sono 4 modi possibili di colorare 3 lettere a con 4 colori, ci devono essere altrettanto 4 modi possibili di colorare una unica lettera b sempre con 4 colori ($C_{4,3}=C_{4,1}=4$).

In tab. 6 troviamo lo schema dei 4 coefficienti per l'espansione di $(a+b)^4$, che corrisponde esattamente alla rispettiva riga del triangolo di Pascal 1 4 6 4 1.

	Con 4 a:	Con 3 a:	Con 2 a:	Con 1 a:	Con 0 a:
COMBINAZIONI COLORANDO a	1) aaaa $C_{4,4}$	1) aaa 2) aaa 3) aaa 4) aaa $C_{4,3}$	1) aa 2) aa 3) aa 4) aa 5) aa 6) aa $C_{4,2}$	1) a 2) a 3) a 4) a $C_{4,1}$	1) - $C_{4,0}$
COMBINAZIONI COLORANDO b	Con 0 b: 1) - $C_{4,0}$	Con 1 b: 1) b 2) b 3) b 4) b $C_{4,1}$	Con 2 b: 1) bb 2) bb 3) bb 4) bb 5) bb 6) bb $C_{4,2}$	Con 3 b: 1) bbb 2) bbb 3) bbb 4) bbb $C_{4,3}$	Con 4 b: 1) bbbb $C_{4,4}$
RISULTATI	1) aaaa	1) aaab 2) aaba 3) abaa 4) baaa	1) aabb 2) abab 3) abba 4) baab 5) baba 6) bbaa	1) bbba 2) bbab 3) babb 4) abbb	1) bbbb
CONTEGGIO RISULTATI	1	4	6	4	1

Tabella 6: L'espansione di $(a+b)^4$.

La tab. 6 si riassume scrivendo che $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

I valori presenti nel triangolo di Pascal allora, oltre a tutte le proprietà viste in precedenza, rappresentano anche (fig. 36):

- le combinazioni di N oggetti presi a gruppi di K;
- i coefficienti dell'espansione della potenza di un binomio (binomio di Newton).
- i modi di colorare K oggetti con N colori.

Questo è un bell'esempio di come anche in matematica ci siano tanti modi per risolvere un problema, ognuno dei quali evidenzia delle caratteristiche diverse, e come ogni idea possa essere analizzata secondo diversi punti di vista.

			1				
		1		1			
	1		2		1		
		1		3		1	
1			4		6		4
				3		4	
						1	
							1

				$C_{0,0}$			
			$C_{1,0}$		$C_{1,1}$		
		$C_{2,0}$		$C_{2,1}$		$C_{2,2}$	
	$C_{3,0}$		$C_{3,1}$		$C_{3,2}$		$C_{3,3}$
$C_{4,0}$		$C_{4,1}$		$C_{4,2}$		$C_{4,3}$	$C_{4,4}$

				1			
			1a		1b		
		1a ²		2ab		1b ²	
	1a ³		3a ² b		3ab ²		1b ³
1a ⁴		4a ³ b		6a ² b ²		4ab ³	1b ⁴

0 colori	0 palline 1) -					
1 colore rosso	0 palline 1) -			1 pallina 1) ●		
2 colori rosso giallo	0 palline 1) -		1 pallina 1) ● 2) ●		2 palline 1) ●●	
3 colori rosso giallo verde	0 palline 1) -	1 pallina 1) ● 2) ● 3) ●		2 palline 1) ●● 2) ●● 3) ●●		3 palline 1) ●●●
4 colori rosso giallo verde blu	0 palline 1) -	1 pallina 1) ● 2) ● 3) ● 4) ●	2 palline 1) ●● 2) ●● 3) ●● 4) ●● 5) ●● 6) ●●		3 palline 1) ●●● 2) ●●● 3) ●●● 4) ●●●	4 palline 1) ●●●●

Figura 36: Confronto tra triangolo di Pascal, combinazioni $C_{N,K}$, termini della potenza del binomio, modi di colorare K palline con N colori.

CONCLUSIONE

Abbiamo visto come l'arte di Chimeri nasconda al suo interno delle strutture che sono state prese dal campo della matematica. L'unione dei due ambiti ha generato un risultato sicuramente di elevata esteticità e piacevolezza e, ritornando al discorso delle emozioni suscitate, forse ha generato anche dello stupore nell'apprendere quante cose possono essere nascoste dietro ad un semplice accostamento di colori.

Nello stesso modo si può rimanere stupiti anche da quante cose possono scaturire dalla semplice operazione di scrivere dei numeri che sono la somma dei due numeri scritti sulla riga superiore, operazione fattibile anche da un bambino. I collegamenti possibili sono molteplici e ancora non completamente noti, tant'è che lo studio del triangolo di Pascal continua ancora oggi.

Chimeri rende visibili sulle sue tele dei concetti matematici che troppo spesso rimangono astratti e per questo inarrivabili da molti. Egli mescola la matematica col proprio senso del bello per creare equilibrio, simmetria, connessioni inaspettate, e queste sono tutte caratteristiche che si ritrovano anche nella matematica. Purtroppo in matematica i concetti tendono a rimanere fumosi sia a causa di cattive spiegazioni sia per il fatto che non vengono declinati in applicazioni pratiche. Grazie a Chimeri riusciamo a visualizzare un po' di matematica e quindi, forse, anche a capirla meglio.

